Partie B : étude dans le cas particulier $a = 2$

1. On donne ci-contre la fonction `u` écrite en langage Python.
Déterminer les valeurs renvoyées par le programme lorsque l'on saisit `u(2,1)` et `u(2,2)` dans la console Python.

```
def u(a,n) :
    u=a
    for k in range(n) :
      u=u**2-2*u+2
    return u
```

2. Quelle conjecture peut-on formuler concernant la suite (u_n) dans le cas où $a = 2$?

On admettra ce résultat sans démonstration.

Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 dont on précisera le premier terme en fonction de a.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + \mathrm{e}^{2^n \times \ln(a-1)}$.

2. Déterminer, suivant les valeurs du réel a strictement supérieur à 1, la limite de la suite (u_n).

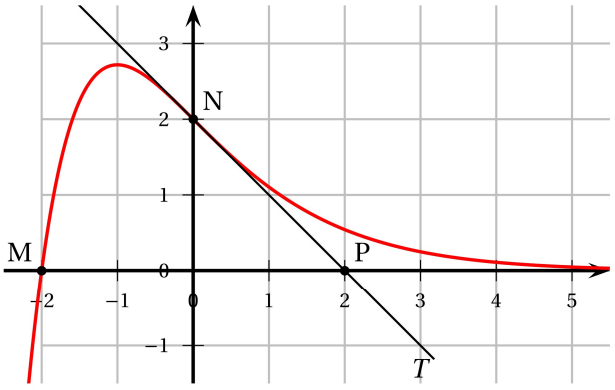
EXERCICE 4 — 6 points

Soit f une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f' sa fonction dérivée et f'' sa dérivée seconde.

Dans le repère orthonormé ci-dessous ont été représentés :

- la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f ;
- la tangente T à $\mathscr{C}_f$ en son point N(0 ; 2) ;
- le point M(−2 ; 0) appartenant à $\mathscr{C}_f$ et P(2 ; 0) appartenant à la tangente T.

On précise que la fonction f est strictement positive sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ et qu'elle est strictement croissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -1]$.



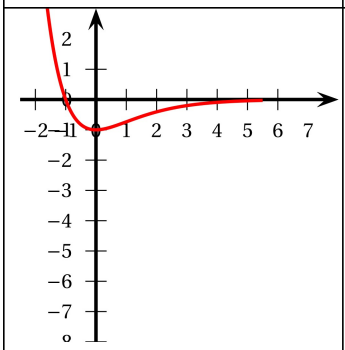
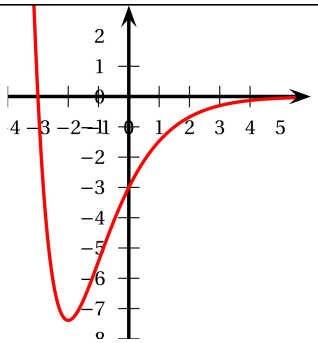
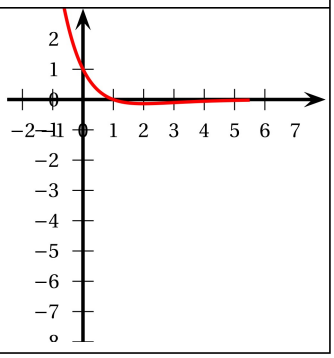
Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** Donner $f(0)$.

b. Déterminer $f'(0)$.

2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$.
3. La fonction f est-elle convexe sur $\mathbb{R}$? Justifier.
4. Parmi les courbes suivantes, indiquer laquelle peut représenter une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$. Justifier.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction [est de la forme

$$f(x) = (ax + b)\,\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a,b et λ sont des constantes réelles.

Pour répondre aux questions suivantes, on utilisera les résultats de la partie A.

1. Justifier que $b = 2$.
2. Justifier que $-2a + b = 0$ puis en déduire la valeur de a.
3. Déterminer une expression algébrique de f. Justifier.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. On admet que $f'(x) = (-x - 1)\,\mathrm{e}^{-x}$. Dresser le tableau de variations complet de f. Justifier.
3. **a.** Étudier la convexité de f.
   b. Préciser les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
4. Pour tout nombre réel $t \geqslant 0$, on pose :

$$I(t) = \int_{-2}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

a. En utilisant une intégration par parties, montrer que :

$$I(t) = (-t - 3)\,\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{2}.$$

b. En déduire un exemple de surface non limitée dont l'aire est finie.