Partie C : étude dans le cas général

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \ln(u_n - 1)$.

a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \ln(u_{n+1} - 1) = \ln\left(u_n^2 - 2u_n + 2 - 1\right) = \ln\left[(u_n - 1)^2\right] = 2\ln(u_n - 1)$ car on sait que $u_n > 1 \iff u_n - 1 > 0$.

Finalement : $v_{n+1} = 2\ln(u_n - 1) = 2v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = 2v_n$ vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$ montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 de premier terme $v_0 = \ln a - 1)$

b. On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 \times 2^n = 2^n \ln(a-1)$.

On peut écrire $v_n = \ln(a-1)^{2^n} = \ln(u_n - 1)$ soit par croissance de la fonction logarithme népérien :

$(a-1)^{2^n} = u_n - 1 \iff u_n = 1 + (a-1)^{2^n} = 1 + \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)}$.

2.

• Si $1 < a < 2$, alors $0 < a - 1 < 1 \Rightarrow \ln(a-1) < 0$ (par croissance de la fonction logarithme népérien).

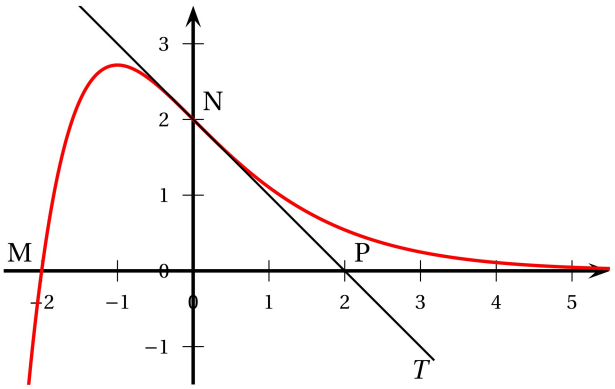
On a donc $2^n \ln(a-1) < 0$ et on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

• Si $a = 2$, $\ln(a-1) = \ln 1 = 0$, donc $2^n \ln(a-1) = 0$ et $u_n = 1 + 1 = 2$. u est constante et on peut écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2$.

• Si $a > 2$, $a - 1 > 1$, donc $\ln(a-1) > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{2^n \ln(a-1)} = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

La suite est divergente.

EXERCICE 4 — 6 points



Partie A : étude graphique

On répondra aux questions suivantes en utilisant le graphique.

1. **a.** On lit $f(0) = 2$.

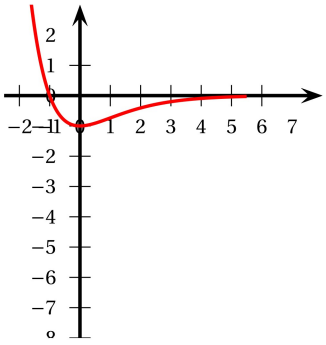
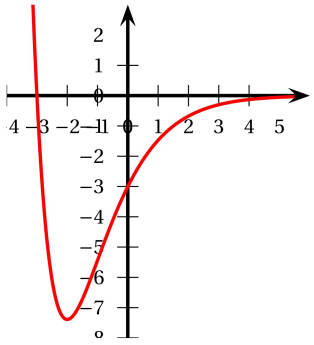
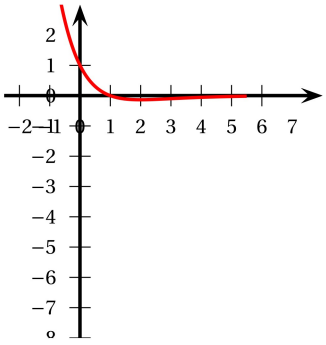
b. Déterminer $f'(0)$. Le nombre dérivé $f'(0)$ est égal au coefficient directeur de la droite (NP) soit à $\dfrac{0-2}{2-0} = -1 = f'(0)$

2. Il semble que $f(-2) = 0$. $S = \{-2\}$.

3. Il semble que la fonction est convexe sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: sur cet intervalle toutes les tangentes à la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ sont sous cette courbe.

Toujours graphiquement sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ les coefficients directeurs des tangentes à la courbe (-1 et 0 au voisinage de plus l'infini) sont croissants : autrement dit la fonction f" est croissante donc $f''(x) \geqslant 0$

4.

Courbe 1	Courbe 2	Courbe 3
		

• On sait que $f(x) \geqslant 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$, donc une primitive sur le même intervalle est croissante ce qui élimine la courbe 3 ;

• Si F est une primitive de f et est représentée par la courbe 1, alors $F'(0) = 0 = f(0) = -1$: ceci est faux donc la courbe 1 est éliminée.

Il ne reste que la courbe 2.

Partie B : recherche d'une expression algébrique

On admet que la fonction f est de la forme

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{\lambda x},$$

où a, b et λ sont des constantes réelles.

1. On a vu que $f(0) = 2 \iff b\mathrm{e}^{\lambda\times 0} = 2 \iff b = 2$.

Donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

2. On a donc $f(x) = (ax+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

On sait aussi que $f(-2) = 0 \iff (-2a+2)\mathrm{e}^{-2\lambda} = 0$ et comme $\mathrm{e}^{-2\lambda} \neq 0$ on a donc $-2a+2 = 0 \iff a = 1$.

Donc $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

3. On a vu que $f'(0) = -1$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{\lambda x} + \lambda(x+2)\mathrm{e}^{\lambda x} = \mathrm{e}^{\lambda x}(1+\lambda x+2\lambda)\mathrm{e}^{\lambda x}$.

Donc $f'(0) = -1 \iff 1+2\lambda = -1 \iff 2\lambda = -2 \iff \lambda = -1$.

On a donc finalement $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

Partie C : étude algébrique

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x+2 = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty$, donc par produit de limites $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

2. Produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et sur cet intervalle :

$f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - (x+2)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(1-x-2) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.

On sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$: le signe de $f('x)$ est donc celui de $-x-1$.

• $-x-1 > 0 \iff -1 > x \iff x < -1$: sur l'intervalle $]-\infty\,;\,-1[$ $f'(x) > 0$: la fonction f est croissante sur cet intervalle ;

• $-x-1 < 0 \iff -1 < x \iff x > -1$: sur l'intervalle $]-1\,;\,+\infty[$ $f'(x) < 0$: la fonction f est décroissante sur cet intervalle ;

• $-x-1 = 0 \iff -1 = x$, $f'(1) = 0$; $f(-1) = (-1+2)\mathrm{e}^1 = \mathrm{e}$ est le maximum de f sur $\mathbb{R}$.
Il reste à calculer la liite en plus l'infini : comme $f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 2\mathrm{e}^{-x}$.

Or on sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} x\mathrm{e}^{-x} = 0$ (puissances comparées) et $\lim\limits_{x\to+\infty} 2\mathrm{e}^{-x} = 0$, d'où par somme de limites : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

3. **a.** f' est elle-même dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
$f''(x) = -\mathrm{e}^{-x} + (x+1)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}(x+1-1) = x\mathrm{e}^{-x}$.
Comme $\mathrm{e}^{-x} > 0$, le signe de $f''(x)$ est celui de x, donc :
- f est convexe sur $[0\,;\,+\infty[$;
- f est concave sur $]-\infty\,;\,0]$;

b. – Donc d'après le résultat précédent la courbe $\mathscr{C}_f$ a un seul point d'inflexion de coordonnées $(0\,;2)$.

4.

$$I(t) = \int_{-2}^{t} (x+2)\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

a. On pose $u(x) = x+2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^{-x}$, d'où
$u'(x) = 1$ et $v(x) = -\mathrm{e}^{-x}$.
Toutes ces fonctions étant continues car dérivables on peut intégrer par parties :
$I(t) = [-(x+2)\mathrm{e}^{-x}]_{-2}^{t} + \displaystyle\int_{-2}^{t} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-(x+2)\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} = \left[(-x-3)\mathrm{e}^{-x}\right]_{-2}^{t} =$
$(-t-3)\mathrm{e}^{-t} + 1\mathrm{e}^2 = \mathrm{e}^2 - (t+3)\mathrm{e}^{-t}$.

b. f est positive sur l'intervalle $[-2\,;\,+\infty[$; on sait qu'alors l'aire de la surface limitée par la courbe $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -2$ et $x = t$ est égale à l'intégrale $I(t)$.
Or quand $t \to +\infty$, la surface n'est pas limitée à droite alors que l'intégrale l'est elle puisqu'on a $\lim\limits_{t\to+\infty} (t+3)\mathrm{e}^{-t} = 0$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t) = \mathrm{e}^2$.