Baccalauréat Asie 24 mars 2023

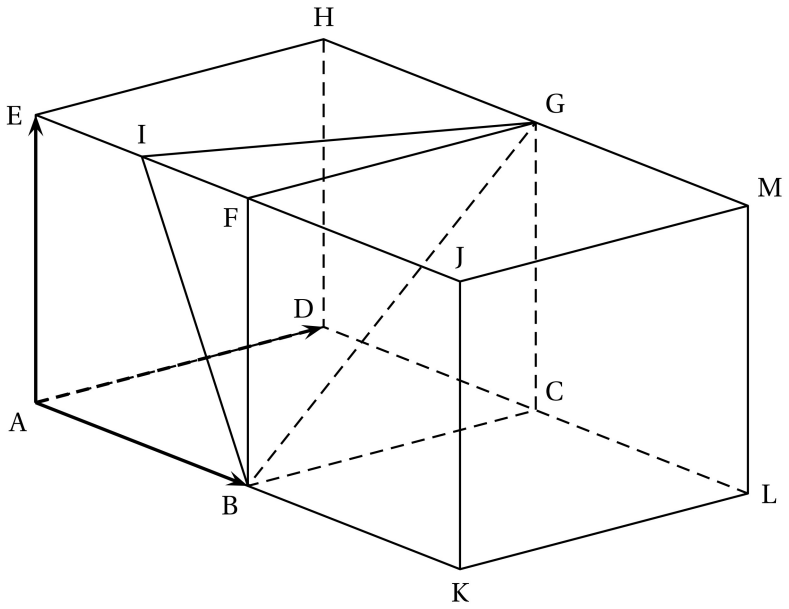
Sujet 2

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

EXERCICE 1 **5 points**

Partie A

On considère deux cubes ABCDEFGH et BKLCFJMG positionnés comme sur la figure suivante :



Le point I est le milieu de [EF].
Dans toute la suite de l'exercice, on se place dans le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$.
Ainsi, par exemple, les points F, G et J ont pour coordonnées

$$F(1\,;0\,;1), \qquad G(1\,;1\,;1) \quad \text{et} \quad J(2\,;0\,;1).$$

1. Montrer que le volume du tétraèdre FIGB est égal à $\dfrac{1}{12}$ d'unité de volume.
On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{aire d'une base} \times \text{hauteur correspondante.}$$

2. Déterminer les coordonnées du point I.

3. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ un vecteur normal au plan (BIG).

4. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (BIG) est $2x - y + z - 2 = 0$.

5. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d, orthogonale à (BIG) et passant par F.

6. **a.** La droite d coupe le plan (BIG) au point L.
Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

b. Calculer la longueur FL.

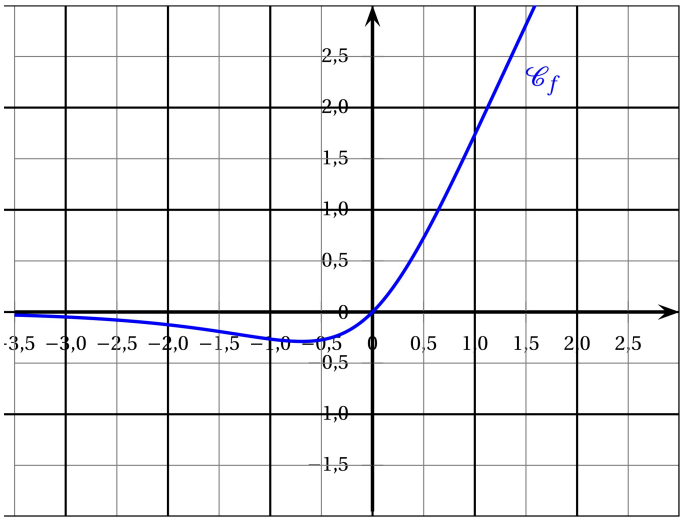
c. Déduire des questions précédentes l'aire du triangle IGB.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative représentée ci-dessous.



Un élève formule les conjectures suivantes à partir de cette représentation graphique :

1. L'équation $f(x) = 2$ semble admettre au moins une solution.
2. Le plus grand intervalle sur lequel la fonction f semble être croissante est $[-0,5\,;\,+\infty[$.
3. L'équation de la tangente au point d'abscisse $x = 0$ semble être : $y = 1,5x$.

Le but de cet exercice est de valider ou rejeter les conjectures concernant la fonction f.

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction g définie par

$$g(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^{x} + 1.$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)$.
2. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.
3. Montrer que $g'(x) = \mathrm{e}^{x}(2\mathrm{e}^{x} - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. Étudier le sens de variation de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de la fonction g en y faisant figurer la valeur exacte des extremums s'il y en a, ainsi que les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
5. En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
6. Sans en mener nécessairement les calculs, expliquer comment on pourrait établir le résultat de la question 5 en posant $X = \mathrm{e}^{x}$.

Partie B

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.