Exercice 3 — 6 points

On considère n un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par :

$$f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{\,1-x}.$$

On admet que la fonction f_n est dérivable sur $[0\,;\,1]$ et on note f_n' sa fonction dérivée.

Partie A

Dans cette partie on étudie le cas où $n = 1$.
On étudie donc la fonction f_1 définie sur $[0\,;\,1]$ par :

$$f_1(x) = x\mathrm{e}^{\,1-x}.$$

1. Montrer que $f_1'(x)$ est strictement positive pour tout réel x de $[0\,;\,1[$.
2. En déduire le tableau de variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0\,;\,1]$.
3. En déduire que l'équation $f_1(x) = 0{,}1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0\,;\,1]$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par

$$u_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_n = \int_0^1 x^n \mathrm{e}^{\,1-x}\,\mathrm{d}x.$$

On admet que $u_1 = \mathrm{e} - 2$.

1. **a.** Justifier que pour tout $x \in [0\,;\,1]$ et pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant x^{n+1} \leqslant x^n$$

.

b. En déduire que pour tout entier naturel n non nul,

$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

c. Montrer que la suite (u_n) est convergente.

2. **a.** À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_{n+1} = (n+1)u_n - 1.$$

b. On considère le script Python ci-dessous définissant la fonction `suite()` :

```
from math import exp

def suite():
  u = ...
  for n in range (1, ...):
      u = ...
  return
```

Recopier et compléter le script Python ci-dessus pour que la fonction `suite(n)` renvoie la valeur de $\displaystyle\int_0^1 x^8 \mathrm{e}^{\,1-x}\,\mathrm{d}x$.

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n non nul on a :

$$u_n \leqslant \frac{\mathrm{e}}{n+1}.$$

b. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 — 5 points

*Pour chacune des cinq affirmations suivantes, indiquer si elle est **vraie** ou **fausse**, en justifiant la réponse.*
Une réponse non justifiée n'est pas prise en compte.
Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - x^2.$$

Affirmation 1 : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

2. On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad -2y' + 3y = \sin x + 8\cos x.$$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2\cos x - \sin x.$$

Affirmation 2 : La fonction f est solution de l'équation différentielle (E).

3. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(3x+1) + 8.$$

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 25$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = g(u_n).$$

On admet que la suite (u_n) est strictement positive.
Affirmation 3 : La suite (u_n) est décroissante.

4. On considère une fonction affine h définie sur $\mathbb{R}$.
On note k la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x) = x^4 + x^2 + h(x)$.
Affirmation 4 : La fonction k est convexe sur $\mathbb{R}$.

5. Une anagramme d'un mot est le résultat d'une permutation des lettres de ce mot.
Exemple : le mot BAC est possède 6 anagrammes : BAC, BCA, ABC, ACB, CAB, CBA.
Affirmation 5 : Le mot EULER possède 120 anagrammes.