3 — Produit scalaire dans l'espace

1. Définition géométrique

Soient $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, et θ l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta}$$

On pose également :

$$\vec{0} \cdot \vec{v} = 0.$$

En particulier :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$$

—

2. Propriétés algébriques

Le produit scalaire est une **forme bilinéaire, symétrique et définie positive**.
Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et tout réel λ :

— **Symétrie**

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

— **Bilinéarité**

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{w}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{w} \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{(\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\vec{u} \cdot \lambda \vec{v})}$$

— **Définie positive**

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}}$$

On définit la norme par :

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

—

3. Identités normiques

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$:

$$\boxed{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

$$\boxed{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v}}$$

—

4. Orthogonalité

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Le produit scalaire est l'outil de référence pour démontrer une orthogonalité dans l'espace.

—

5. Lien avec le projeté orthogonal

Soient A, B, C trois points de l'espace et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}}$$

Comme $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AH}\|} \quad \text{ou} \quad \boxed{-\|\overrightarrow{AB}\| \, \|\overrightarrow{AH}\|}$$

(le signe dépend de l'orientation sur la droite (AB)).

—

6. Expression en coordonnées

Dans un repère orthonormé, si

$$\vec{u} = (x, y, z) \qquad \text{et} \qquad \vec{v} = (x', y', z'),$$

alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'}$$

et

$$\boxed{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$