Raisonnement par récurrence — Feuille d'exercices 2

Terminale Spécialité

Exercice 1 — La file d'élèves

On considère une file de n élèves. On sait que l'élève n°1 reçoit l'information.

On note $P(n)$ la propriété : « l'élève n°n reçoit l'information. »

Quelle condition doit-on ajouter pour pouvoir démontrer $P(n)$ **par récurrence** ?

Exercice 2 — Les marches qui s'allument

Un escalier comporte n marches numérotées de 1 à n. La marche n°1 est allumée.

On note $P(n)$: « la marche n°n est allumée. »

1. (**Initialisation**) Montrer que $P(1)$ est vraie.
2. (**Hérédité**) On suppose $P(n)$ vraie. Quelle condition doit être posée pour garantir que $P(n+1)$ est vraie ?
3. Conclure que toutes les marches s'allument.

Exercice 4 — Somme arithmétique

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $S_n = 1 + 2 + \cdots + n$.

Montrer par récurrence que

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 3 — Somme des carrés

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère $C_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$.

Montrer par récurrence que

$$C_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 5 — Suite décroissante et minorée par 4

Soit $u_0 \geq 4$ et, pour tout $n \geq 0$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{u_n + 4}{2}$.

Montrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$\boxed{4 \leq u_{n+1} \leq u_n}.$$

Exercice 6 — Suite arithmético-géométrique : formule explicite

On définit (v_n) par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \geq 0$,

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}\, v_n + 1.$$

Objectif : démontrer par récurrence que, pour tout $n \geq 0$,

$$\boxed{v_n = 4\left(1 - \left(\tfrac{3}{4}\right)^n\right)}.$$

Exercice 7 — Bernoulli simplifié (inégalité)

Pour $x \geq 0$, **montrer par récurrence** que, pour tout $n \geq 1$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$