Chapitre VII — Fonctions de référence

3) Fonction racine carrée

Lien avec la fonction carré.

Nous avons vu que pour tout réel $a > 0$, l'équation $x^2 = a$ admet **exactement deux solutions** : un réel positif et un réel négatif, opposés l'un de l'autre.

Par exemple, $x^2 = 9$ a pour solutions 3 et -3, car $3^2 = 9$ et $(-3)^2 = 9$.

Parmi ces deux solutions, on distingue **l'antécédent positif**, que l'on appelle la **racine carrée** de a.

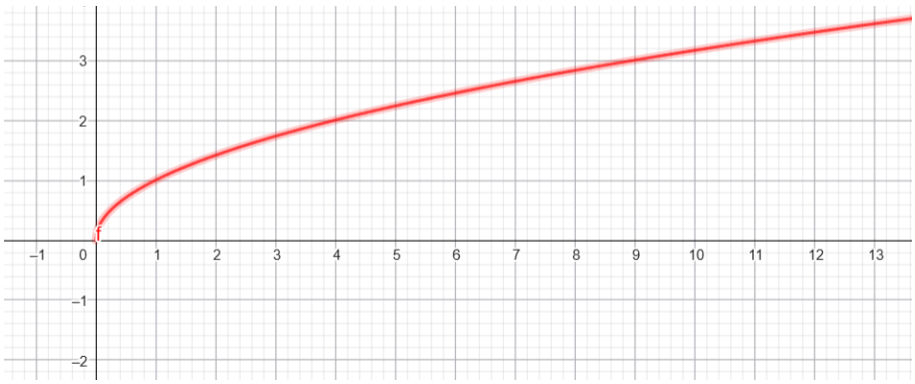
Définition

Pour tout réel $a \geq 0$, la **racine carrée** de a, notée $\sqrt{a}$, est l'unique solution **positive** de l'équation $x^2 = a$.

Autrement dit, $\sqrt{a}$ est l'unique réel positif tel que $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$.

La fonction racine carrée est définie sur $[0\,;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}.$$



Remarques.

1. La fonction racine carrée n'est pas définie pour les réels strictement négatifs. Son domaine de définition est $[0\,;+\infty[$.
2. Pour tout réel $x \geq 0$, on a $\sqrt{x} \geq 0$. La racine carrée d'un réel est toujours **positive ou nulle**.
3. On prendra garde à ne pas confondre $\sqrt{x^2}$ et x :

   $$\sqrt{x^2} = |x|.$$

   En particulier, $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 \neq -3$.

Propriété

La fonction racine carrée est **strictement croissante** sur $[0\,;+\infty[$.

Tableau des variations.

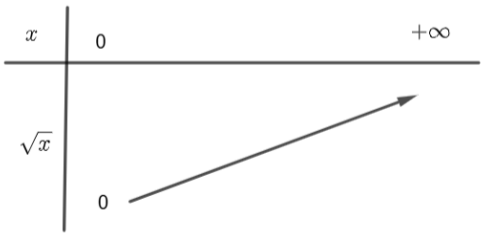
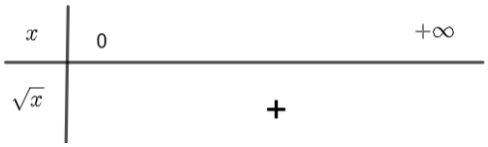


Tableau de signes.

La fonction racine carrée est positive sur son domaine de définition, et s'annule en 0.



Théorème

Soient a et b deux réels positifs.

$$a \leq b \iff \sqrt{a} \leq \sqrt{b}.$$

Autrement dit, la fonction racine carrée **conserve l'ordre** sur $[0\,;+\infty[$.

Exemple. Comme $2 \leq 3$, on a $\sqrt{2} \leq \sqrt{3}$. Réciproquement, si $\sqrt{x} \leq \sqrt{5}$ avec $x \geq 0$, alors $x \leq 5$.

Rappel — valeur absolue.

Pour tout réel x, la **valeur absolue** de x, notée $|x|$, est définie par :

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Géométriquement, $|x|$ représente la **distance** entre le réel x et 0 sur la droite numérique.

Exemples. $|3| = 3, \quad |-5| = 5, \quad |0| = 0.$

Propriété

1. Pour tout réel $x \geq 0$: $\quad (\sqrt{x})^2 = x$.
2. Pour tout réel x (positif ou négatif) : $\quad \sqrt{x^2} = |x|$.
   En particulier, pour tout réel $x \geq 0$: $\quad \sqrt{x^2} = x$.
3. Pour tous réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$:

$$\sqrt{a \times b} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}.$$

Exemples. $\sqrt{4\times 25}=\sqrt{4}\times\sqrt{25}=2\times 5=10$. $\sqrt{50}=\sqrt{25\times 2}=5\sqrt{2}$.

Définition

Une fonction f est dite **paire** lorsque son domaine de définition est symétrique par rapport à 0 et que pour tout x de ce domaine :

$$f(-x)=f(x).$$

Remarque. La fonction racine carrée n'est **ni paire, ni impaire** car son domaine de définition $[0\,;+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

Cette notion de parité sera réutilisée dans l'étude d'autres fonctions de référence.

Propriété

Soit a un réel.

- Si $a\geq 0$, l'équation $\sqrt{x}=a$ admet une unique solution : $x=a^2$.
- Si $a<0$, l'équation $\sqrt{x}=a$ n'a pas de solution.

Exemples. $\sqrt{x}=3\iff x=9$. $\sqrt{x}=0\iff x=0$. $\sqrt{x}=-2$ n'a pas de solution.

Position relative des courbes $y=x$, $y=x^2$ et $y=\sqrt{x}$

- Sur $[0\,;1]$: $x^2\leq x\leq\sqrt{x}$
  (la parabole est en dessous de la droite, elle-même en dessous de la racine).
- Sur $[1\,;+\infty[$: $\sqrt{x}\leq x\leq x^2$
  (l'ordre est inversé).
- Les trois courbes se croisent en $(0\,;0)$ et en $(1\,;1)$.

Vérification numérique. Pour $x=0{,}25$: $x^2=0{,}0625$, $x=0{,}25$, $\sqrt{x}=0{,}5$. On a bien $0{,}0625\leq 0{,}25\leq 0{,}5$.

Pour $x=4$: $\sqrt{x}=2$, $x=4$, $x^2=16$. On a bien $2\leq 4\leq 16$.



Sur la figure : la parabole $y=x^2$ est en rouge, la droite $y=x$ en noir, la racine $y=\sqrt{x}$ en vert.