Fiche d'exercices — Calcul littéral

Classe de Seconde

Rappels essentiels

Pour tous réels a, b, c et k :

1. **Distributivité simple :** $k(a+b) = ka + kb$
2. **Double distributivité :** $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
3. **Identités remarquables :**
   - $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
   - $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
   - $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
4. **Factoriser**, c'est transformer une somme en produit.
5. **Développer**, c'est transformer un produit en somme.

Exercice 1 – Développer (niveau 1)

Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A = 3(2x+5)$
2. $B = -4(3x-7)$
3. $C = 2x(x+3)$
4. $D = -5x(2x-4)$
5. $E = (x+2)(x+7)$
6. $F = (x-3)(x+5)$
7. $G = (2x+1)(x-4)$
8. $H = (3x-2)(5x+1)$

Exercice 2 – Développer avec les identités remarquables

Développer en utilisant les identités remarquables.

1. $A = (x+5)^2$
2. $B = (x-7)^2$
3. $C = (2x+3)^2$
4. $D = (3x-1)^2$
5. $E = (x+4)(x-4)$
6. $F = (2x-5)(2x+5)$
7. $G = (x+\sqrt{3})^2$
8. $H = (x\sqrt{2}-1)(x\sqrt{2}+1)$

Exercice 3 – Développer (synthèse)

Développer et réduire.

1. $A = (x+1)^2 + (x-1)^2$
2. $B = (x+3)^2 - (x-3)^2$
3. $C = (2x-1)(2x+1) - (x+2)^2$
4. $D = 3(x+2)^2 - 2(x-1)(x+1)$
5. $E = (x-1)(x+2) + (x+1)(x-3)$
6. $F = (2x+3)^2 - (2x-3)^2$

Exercice 5 – Factoriser avec les identités remarquables

Factoriser en reconnaissant une identité remarquable.

1. $A = x^2 - 25$
2. $B = 9x^2 - 16$
3. $C = x^2 + 6x + 9$
4. $D = x^2 - 10x + 25$
5. $E = 4x^2 + 12x + 9$
6. $F = 25x^2 - 30x + 9$
7. $G = x^2 - 7$
8. $H = (x+1)^2 - 4$

Exercice 6 – Factorisations mixtes

Factoriser les expressions suivantes (un facteur commun peut être à chercher, une identité remarquable peut apparaître après une étape).

1. $A = (x+3)^2 - (x+3)(2x-1)$
2. $B = (2x-5)^2 - 9$
3. $C = (x+1)^2 - (x-2)^2$
4. $D = 4(x-3)^2 - 25$
5. $E = x^2 - 6x + 9 - (2x+1)^2$
6. $F = (3x+2)(x-1) + (3x+2)^2$

Exercice 7 – Calculs astucieux

Sans calculatrice, utiliser les identités remarquables pour calculer rapidement.

1. 101^2
2. 99^2
3. 103×97
4. 1001×999
5. $25^2 - 24^2$
6. $102^2 - 98^2$

Exercice 8 – Équations produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes après les avoir, si nécessaire, transformées sous forme d'un produit de facteurs égal à zéro.

1. $(x-3)(x+5) = 0$
2. $(2x+1)(3x-6) = 0$
3. $x^2 - 9 = 0$
4. $x^2 - 7x = 0$
5. $4x^2 - 25 = 0$
6. $(x+2)^2 - 16 = 0$
7. $(x-1)(x+3) + (x-1)(2x+5) = 0$
8. $x^2 + 8x + 16 = 0$

Exercice 9 – Démonstration avec le calcul littéral

Soit n un entier naturel.

1. Développer et réduire $(n+1)^2 - n^2$.
2. En déduire que la différence des carrés de deux entiers consécutifs est égale à la somme de ces deux entiers.
3. Vérifier sur un exemple numérique.

Exercice 10 – Programme de calcul

On considère le programme de calcul suivant :

- Choisir un nombre.
- Lui ajouter 3.
- Élever le résultat au carré.
- Soustraire le carré du nombre de départ.

1. Tester ce programme avec $x = 2$, puis avec $x = -5$.
2. On note x le nombre choisi au départ. Exprimer le résultat du programme en fonction de x, puis le développer et le réduire.
3. Montrer que le résultat du programme est toujours un multiple de 3.

Exercice 11 – Vrai ou faux

Pour chaque affirmation, indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant.

1. Pour tout réel x, $(x+2)^2 = x^2 + 4$.
2. Pour tout réel x, $(x-5)(x+5) = x^2 - 25$.
3. Pour tout réel x, $-(x-3) = -x - 3$.
4. Pour tout réel x, $x^2 + 6x + 9 = (x+3)^2$.
5. L'expression $x^2 + 1$ se factorise en $(x+1)(x-1)$.
6. Pour tout réel x, $(2x)^2 = 2x^2$.

Exercice 12 – Pour aller plus loin

1. Factoriser l'expression $A = x^4 - 1$ en produit de trois facteurs.
2. Développer puis réduire $B = (x+1)(x-1)(x^2+1)$, et conclure.
3. Factoriser $C = x^2 + 2x + 1 - y^2$.
4. Montrer que pour tous réels a et b, $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$.
5. En déduire une factorisation de l'expression $D = (3x+1)^2 - (3x-1)^2$.