Fiche d'exercices — Échantillonnage et loi des grands nombres

---

Rappels

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance σ^2. On considère n répétitions indépendantes de X, notées $X_1, X_2, \ldots, X_n$, suivant toutes la même loi. On pose :

$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$$

On a : $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev : Pour tout $a > 0$,

$$P\left(|M_n - \mu| \geqslant a\right) \leqslant \frac{\sigma^2}{na^2} \qquad \text{ou de façon équivalente} \qquad P\left(|M_n - \mu| < a\right) \geqslant 1 - \frac{\sigma^2}{na^2}$$

Loi faible des grands nombres : Pour tout $a > 0$, $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(|M_n - \mu| < a\right) = 1$.

Exercice 1 — Moyenne empirique et espérance

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de points marqués par un joueur lors d'un match. On admet que $E(X) = 22$ et $V(X) = 65$.
Le joueur dispute n matchs. On note $X_1, X_2, \ldots, X_n$ les variables aléatoires donnant le nombre de points lors de chaque match, supposées indépendantes et de même loi que X. On pose $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Que représente concrètement la variable aléatoire M_{50} dans ce contexte ?
2. Déterminer $E(M_{50})$ et $V(M_{50})$.
3. Démontrer que $P\left(|M_{50} - 22| \geqslant 3\right) \leqslant \dfrac{13}{90}$.
4. En déduire que $P\left(19 < M_{50} < 25\right) > 0{,}85$.
5. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   « Il n'existe aucun entier naturel n tel que $P\left(|M_n - 22| \geqslant 3\right) < 0{,}01$. »

Exercice 2 — Loi binomiale comme somme de variables de Bernoulli

Une usine produit des balles de tennis. Une balle est jugée conforme avec une probabilité $p = 0{,}85$, indépendamment des autres.
On teste successivement n balles. Pour tout entier i compris entre 1 et n, on définit la variable aléatoire X_i par :

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la balle } i \text{ est conforme} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Quelle est la loi suivie par chaque X_i ? Préciser son espérance et sa variance.
2. Les variables $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont-elles indépendantes ? Justifier brièvement.
3. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.
   a. Que représente concrètement S_n ?
   b. En utilisant la linéarité de l'espérance, montrer que $E(S_n) = np$.
   c. En utilisant l'indépendance des X_i, montrer que $V(S_n) = np(1-p)$.
4. Justifier que S_n suit une loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. Pourquoi ce résultat est-il cohérent avec les formules classiques de la loi binomiale ?

5. Application : on pose $n = 20$.

a. Calculer $E(S_{20})$ et $V(S_{20})$.

b. On note $F_{20} = \dfrac{S_{20}}{20}$ la fréquence de balles conformes dans le lot. Exprimer $E(F_{20})$ et $V(F_{20})$ en fonction de p.

c. Interpréter $E(F_{20})$ dans le contexte de l'exercice.

Exercice 3 — Proportion et fréquence

La probabilité qu'un jouet produit par une entreprise réussisse un test de fabrication est égale à 0,95. On prélève un lot de n jouets, assimilé à un tirage avec remise. On note S_n la variable aléatoire comptant le nombre de jouets ayant réussi le test, et $F_n = \dfrac{S_n}{n}$ la fréquence de réussite dans le lot.

1. Montrer que $E(F_n) = 0{,}95$ et que $V(F_n) = \dfrac{0{,}0475}{n}$.

2. On s'intéresse à l'évènement I : « la proportion de jouets réussissant le test dans le lot est strictement comprise entre 93 % et 97 %. »

a. Exprimer I à l'aide de F_n.

b. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que $P(I) \geqslant 1 - \dfrac{0{,}0475}{n \times 0{,}0004}$.

c. Déterminer la plus petite valeur entière n à partir de laquelle $P(I) \geqslant 0{,}96$.

3. Interpréter le résultat de la loi faible des grands nombres dans ce contexte.

Exercice 4 — Taille d'échantillon

On s'intéresse à la fréquence de connexions instables sur un réseau d'entreprise. La probabilité qu'une connexion soit instable est $p = 0{,}145$. On considère un échantillon de n connexions. On note X_n la variable aléatoire comptant les connexions instables, supposée de loi $\mathscr{B}(n\,;0{,}145)$, et $F_n = \dfrac{X_n}{n}$ la fréquence d'instabilité.

On admet que $V(F_n) = \dfrac{0{,}123975}{n}$.

1. Calculer $E(F_n)$.

2. Vérifier que $P\left(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant \dfrac{12{,}5}{n}$.

3. Un responsable étudie un échantillon de 1000 connexions et observe $F_{1000} = 0{,}3$. Soupçonne-t-il à juste titre un dysfonctionnement ? Justifier à l'aide de l'inégalité précédente.

4. Déterminer le plus petit entier n tel que $P\left(|F_n - 0{,}145| \geqslant 0{,}1\right) \leqslant 0{,}05$.