Fiche d'exercices

Fonctions exponentielles et nombre dérivé

Exercice 1 — Fonctions exponentielles de base a

On considère les trois fonctions définies sur $[0\,;+\infty[$ par :

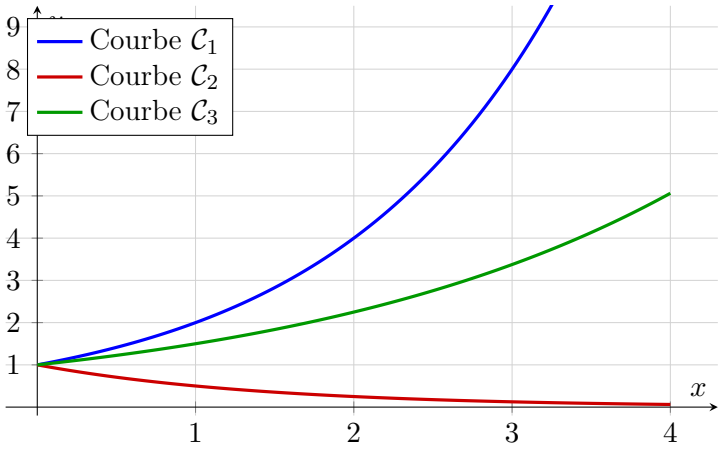
$$f(x) = 2^x, \qquad g(x) = (0{,}5)^x, \qquad h(x) = 1{,}5^x.$$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant.

x	0	1	2	3	4
$f(x) = 2^x$					
$g(x) = (0{,}5)^x$					
$h(x) = 1{,}5^x$					

2. Pour chacune des trois fonctions, indiquer si elle est croissante ou décroissante. Justifier avec la valeur de la base.

3. Parmi les trois courbes ci-dessous, associer chacune à l'une des fonctions f, g ou h. Justifier.



4. Que remarque-t-on pour toutes les courbes en $x = 0$? Expliquer pourquoi.

5. Vérifier que $f(2) \times f(3) = f(5)$. Quelle propriété cela illustre-t-il ?

Exercice 2 — D'une suite géométrique à une fonction exponentielle

Une ville comptait 10 000 habitants en 2010. Sa population augmente de 5 % par an. On note u_n le nombre d'habitants n années après 2010. Ainsi $u_0 = 10\,000$.

1. De quel coefficient multiplie-t-on la population chaque année ? Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

2. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Préciser sa raison.

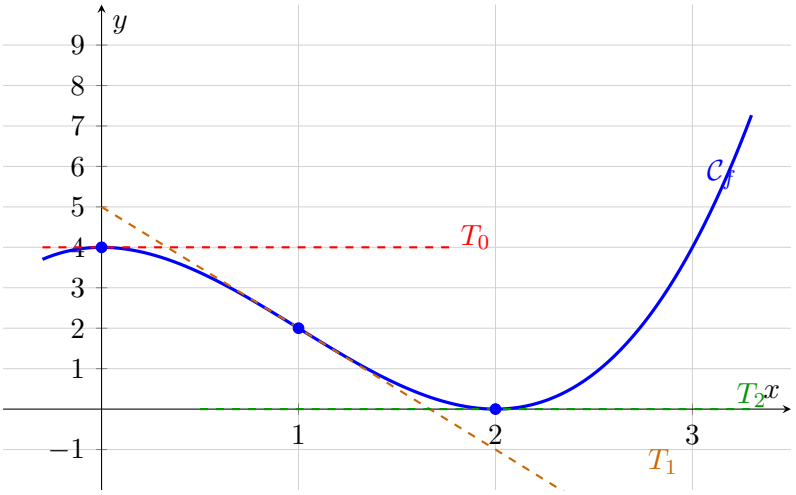
3. Exprimer u_n en fonction de n.

4. Calculer u_1, u_2 et u_3.
   On donne : $1{,}05^2 = 1{,}1025$ *et* $1{,}05^3 \approx 1{,}158$.

5. On définit la fonction f sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = 10\,000 \times 1{,}05^x$.
   a. Vérifier que $f(0) = u_0$ et $f(1) = u_1$.
   b. La fonction f est-elle croissante ou décroissante ? Justifier.
   c. Que modélise concrètement la fonction f dans ce contexte ?
   d. Calculer $f(5,75)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercie.

Exercice 3 — Nombre dérivé – lecture graphique

La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f. Les droites T_0, T_1 et T_2 sont les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses $x = 0$, $x = 1$ et $x = 2$.



1. Que représente géométriquement le nombre dérivé $f'(a)$?
2. Lire graphiquement $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.
3. La tangente T_0 est horizontale. En déduire $f'(0)$.
4. La tangente T_2 est horizontale. En déduire $f'(2)$. Qu'indique cette valeur sur le comportement de f en $x = 2$?
5. La tangente T_1 passe par $(1\,;\,2)$ et $(2\,;\,-1)$.
   a. Calculer le coefficient directeur de T_1.
   b. En déduire $f'(1)$.
   c. Que traduit le signe de $f'(1)$ pour la fonction f autour de $x = 1$?
6. Que peut-on dire des points d'abscisses 0 et 2 sur la courbe ?

Exercice 4 — Calcul de dérivées

1. Calculer la dérivée de chacune des fonctions suivantes.
   a. $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$
   b. $g(x) = x^3 - 6x$
   c. $h(x) = -2x^3 + 9x^2 - 4$
   d. $k(x) = 4x - 7$
2. (a) Calculer $g'(0)$, $g'(1)$ et $g'(2)$.
   (b) Calculer $h'(x)$, puis $h'(0)$, $h'(1)$ et $h'(3)$.