Chapitre VII : La fonction exponentielle

1. Définition

Théorème (admis)

Il existe une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que

$$f' = f \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

Cette fonction est appelée **fonction exponentielle**.

Définition

La fonction exponentielle est notée exp. C'est donc l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant

$$\exp' = \exp \qquad \text{et} \qquad \exp(0) = 1.$$

Remarque (construction). On peut construire cette fonction comme limite de sommes de puissances : pour tout réel x,

$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

Cette écriture, hors programme, éclaire la propriété $\exp' = \exp$: en dérivant terme à terme, le terme $\dfrac{x^k}{k!}$ a pour dérivée $\dfrac{x^{k-1}}{(k-1)!}$, et la somme reste globalement inchangée. On vérifie aussi directement que pour $x = 0$ tous les termes s'annulent sauf le premier, d'où $\exp(0) = 1$.

Le nombre e

On appelle **nombre** e la valeur de l'exponentielle en 1 :

$$e = \exp(1) = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right) \approx 2{,}718.$$

2. Propriétés algébriques

Propriétés

Pour tous réels a et b :

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b) \quad \text{(relation fonctionnelle)}.$$

De plus, pour tout réel x :

- $\exp(x) > 0$;
- $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$;
- $\exp(a-b) = \dfrac{\exp(a)}{\exp(b)}$;
- pour tout entier n, $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$.

La relation fonctionnelle $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$ ainsi que les égalités $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ et $\exp(nx) = \big(\exp(x)\big)^n$ sont exactement les **règles de calcul sur les puissances**. Comme de plus $\exp(1) = e$, on a $\exp(n) = e^n$ pour tout entier n. Ces propriétés justifient donc d'adopter la **notation puissance** : pour tout réel x, on écrit

$$\exp(x) = e^x.$$

Les propriétés précédentes se réécrivent alors avec cette notation.

Notation e^x et règles de calcul

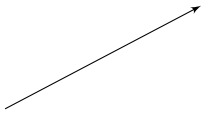
Pour tout réel x, on note $\exp(x) = e^x$, où $e = \exp(1) \approx 2{,}718$. Pour tous réels a, b et tout entier n :

$$e^0 = 1, \quad e^1 = e, \quad e^x > 0, \quad e^{a+b} = e^a e^b, \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a}, \quad e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}, \quad \big(e^a\big)^n = e^{na}.$$

3. Sens de variation et représentation graphique

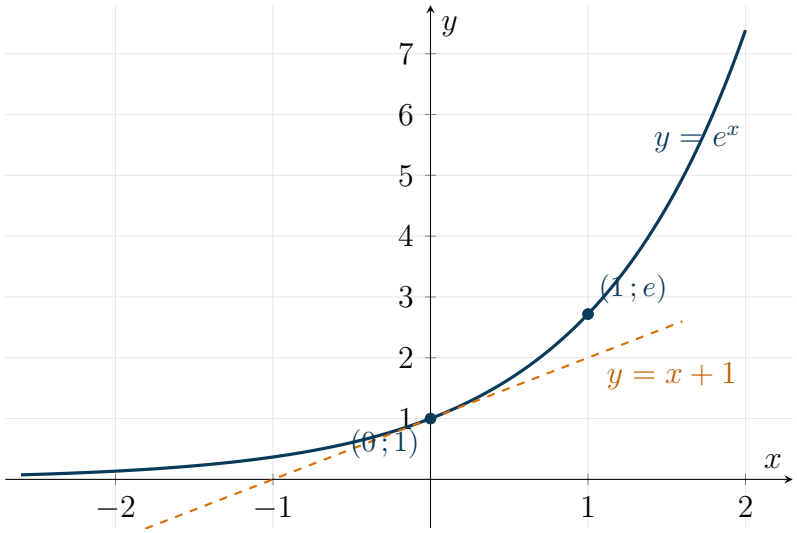
Variations

La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\exp' = \exp$. Comme $\exp(x) > 0$ pour tout réel x, la fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$	$+$	
exp		

La tangente à la courbe au point d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\exp'(0) = 1$ et passe par le point $(0\,;\,1)$: son équation est

$$y = \exp'(0)\,x + \exp(0) = x + 1.$$



4. Dérivée de e^u

Théorème

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et

$$\left(e^u\right)' = u'\,e^u.$$

Exemples.

- $f(x) = e^{3x}$: on pose $u(x) = 3x$, donc $u'(x) = 3$ et $f'(x) = 3\,e^{3x}$.
- $f(x) = e^{-x^2}$: on a $u(x) = -x^2$, donc $u'(x) = -2x$ et $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.
- $f(x) = e^{x^2+1}$: on a $u'(x) = 2x$, donc $f'(x) = 2x\,e^{x^2+1}$.
- Cas particulier : pour $f(x) = e^{kx}$ avec k réel, $f'(x) = k\,e^{kx}$.