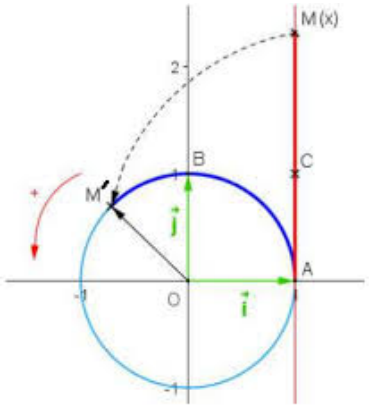
Chapitre V – Trigonométrie

1) Repérage sur le cercle trigonométrique



On se place dans un repère orthonormé $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens anti-horaire.

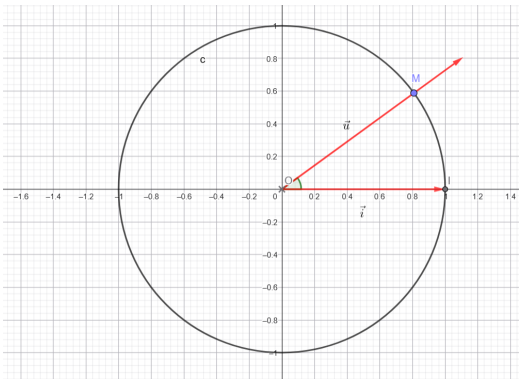
On enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique : à un réel x associé au point M de la droite, on associe le point M' sur le cercle tel que la longueur AM est égale à la longueur de l'arc reliant A à M'.
(on compte la longueur des tours si nécessaire).

À un point M de la droite des réels est associé un unique point M' du cercle trigonométrique.
Cependant, à un point M' du cercle trigonométrique sont associés plusieurs réels.

Exemple : le point B est associé aux réels

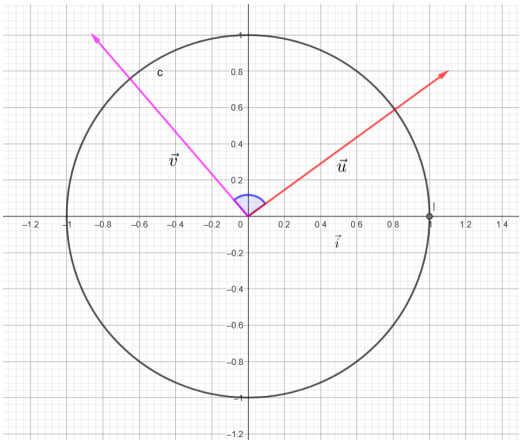
$$\frac{\pi}{2},\quad \frac{5\pi}{2},\quad \frac{9\pi}{2},\quad -\frac{3\pi}{2},\ \ldots$$

2) Angles orientés



Définition

Soit $\vec{u}$ un vecteur. La demi-droite $(O,\vec{u})$ coupe le cercle trigonométrique en un point M. On définit l'angle orienté $(\vec{i},\vec{u})$ comme la mesure en radian associée au point M.



Définition

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. On note $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{i}, \vec{v}) - (\vec{i}, \vec{u})$.

Propriété

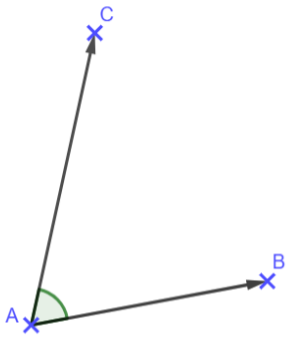
Propriétés des angles orientés

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls.

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$$

$$(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$



Remarque.

On a présenté deux façons de mesurer un angle.
L'angle géométrique $\widehat{BAC}$ est mesuré en degrés.
L'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est mesuré en radians.

Propriété

Conversion degrés / radians

Si d est la mesure d'un angle en degrés et r sa mesure en radians, alors :

$$d = \frac{180}{\pi} r \qquad \text{et} \qquad r = \frac{\pi}{180} d.$$

Définition

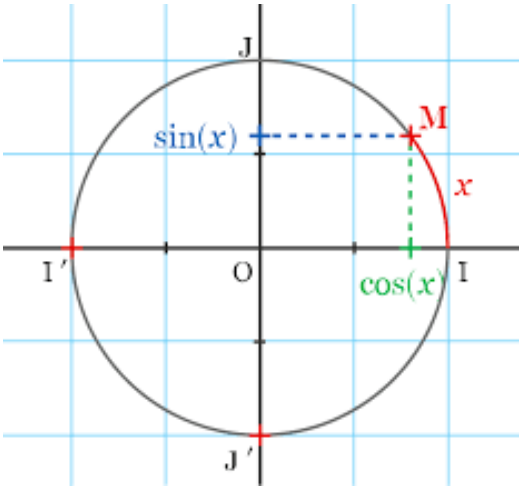
Plusieurs réels peuvent mesurer le même angle orienté : leurs mesures en radians diffèrent d'un multiple de 2π.
Parmi tous ces réels, il en existe un unique appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi[$. Ce réel est appelé la **mesure principale** de l'angle orienté.

Exemple.
Les réels $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{5\pi}{2}$ mesurent le même angle, on écrit

$$\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2} \ [2\pi].$$

La mesure principale de cet angle est $\frac{\pi}{2}$.

3) Trigonométrie



Définition

À tout réel x correspond un point M sur le cercle trigonométrique.
L'abscisse de M est appelée le **cosinus** de x et on la note $\cos(x)$.
L'ordonnée de M est appelée le **sinus** de x et on la note $\sin(x)$.

Définition

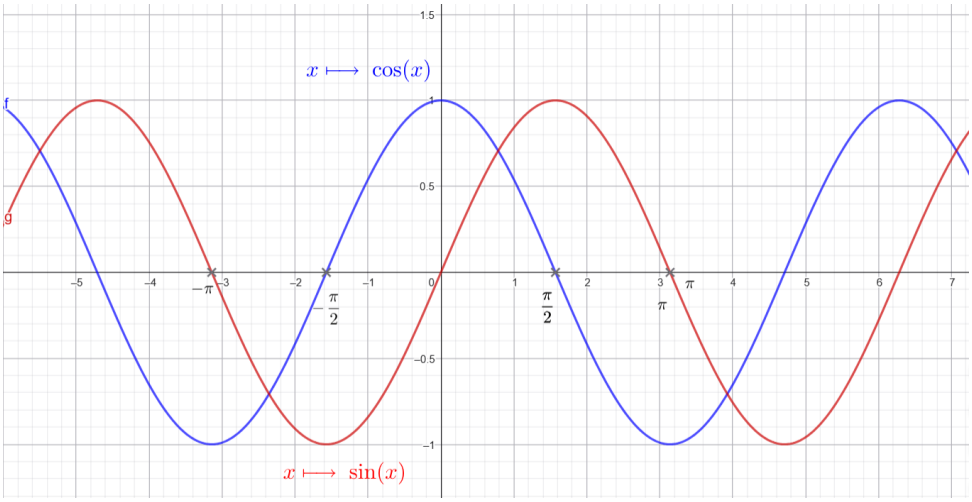
On définit la fonction cosinus :

$$\cos : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \cos(x) \end{cases}$$

On définit la fonction sinus :

$$\sin : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow [-1,1] \\ x \longmapsto \sin(x) \end{cases}$$

Représentation graphique



Propriété

Périodicité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

Parité

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

Courbes translatées

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x) \qquad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(x)$$

Propriété

Valeurs remarquables

θ (radian)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
θ (degré)	0°	30°	45°	60°	90°
$\cos(\theta)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(\theta)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Propriété

Angles associés
Pour tout réel x :

$$\cos(-x) = \cos(x) \qquad \sin(-x) = -\sin(x)$$

$$\cos(\pi - x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi - x) = \sin(x)$$

$$\cos(\pi + x) = -\cos(x) \qquad \sin(\pi + x) = -\sin(x)$$

