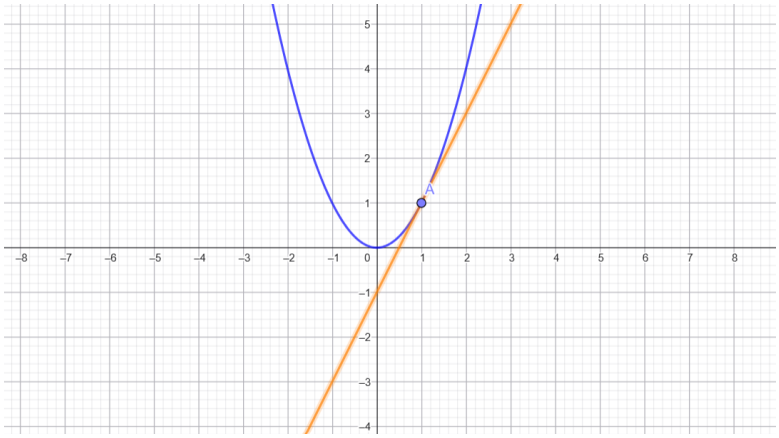
Chapitre V – Nombre dérivé – Fonction dérivée

1) Nombre dérivé

Lorsqu'on zoome la courbe représentative d'une fonction au voisinage d'un point A d'abscisse a, la courbe ressemble à une droite.

Cette droite est appelée **tangente** à C_f en a et on note $f'(a)$ le coefficient directeur de cette tangente.



Exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f'(1) = 2$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
On dit que f est dérivable en a si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Cette limite est appelée **nombre dérivé** de f en a et on la note

$$f'(a).$$

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 1$.
Pour $h \neq 0$, on pose

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h}.$$

On calcule :

$$f(1) = 1 \qquad \text{et} \qquad f(1+h) = 1 + 2h + h^2.$$

Donc

$$\tau(h) = 2 + h \quad \Longrightarrow \quad \lim_{h \to 0} \tau(h) = 2.$$

Ainsi f est dérivable en 1 et $f'(1) = 2$.

Équation de la tangente

Propriété

Soit f une fonction dérivable en a.
La tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $A(a\,;\,f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.
Une équation de la tangente en a est :

$$T_a : \quad y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple
Soit $f(x) = x^2$.
On sait que $f'(x) = 2x$.
Au point $a = 1$:

$$f(1) = 1 \quad \text{et} \quad f'(1) = 2.$$

Donc :

$$T_1 : \quad y = 2(x-1) + 1$$

soit

$$T_1 : \quad y = 2x - 1.$$

2) Fonction dérivée

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si f est dérivable en tout point de I, on dit que f est **dérivable sur** I.
On définit alors la **fonction dérivée** de f, notée f', qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé $f'(x)$.

Propriété

Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur leur domaine :

$f(x)$	$f'(x)$	Domaine
a	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\dfrac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

Propriété

Opérations sur les dérivées

Soient u et v dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

- $(u+v)' = u' + v'$
- $(\lambda u)' = \lambda u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v \neq 0)$
- $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2} \quad (u \neq 0)$
- Si $g(x) = f(ax+b)$ alors $g'(x) = a\, f'(ax+b)$

3) Dérivée et variations

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si $f'(x) > 0$ sur I, alors f est strictement croissante sur I.
- Si $f'(x) < 0$ sur I, alors f est strictement décroissante sur I.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $a \in I$.
Si $f'(a) = 0$, alors la tangente à la courbe au point d'abscisse a est horizontale.
Si, de plus, f' change de signe en a, alors f admet un extremum local en a.