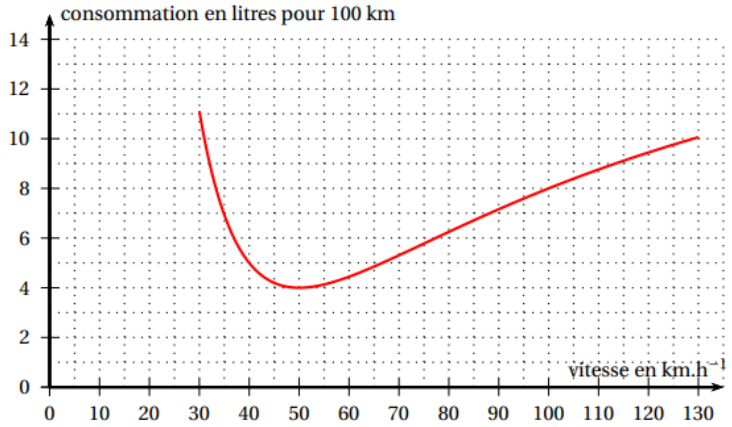
Sujet 5

Exercice 3 **5 points**

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse.

Lecture graphique

Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km.h^{-1} du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km.h^{-1} ?
2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km?
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale?

Modélisation

Si on note x la vitesse du véhicule en km.h^{-1}, avec $30 \leqslant x \leqslant 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1\,600x + 40\,000}{x^2}.$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[30\,;\,130]$.

4. Montrer que pour tout $x \in [30\,;\,130]$,

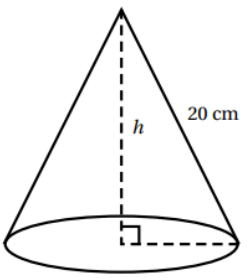
$$f'(x) = \frac{800\,(2x - 100)}{x^3}.$$

5. Démontrer la conjoncture de la question 3.

Sujet 6

Exercice 4 **5 points**

On considère un cône de révolution ayant une génératrice de longueur 20 cm et d'une hauteur h en cm.
On rappelle que le volume V en cm^3 d'un cône de révolution de base un disque d'aire $\mathscr{A}$ en cm^2 et de hauteur h en cm est : $V = \frac{1}{3}\mathscr{A}h$.
Dans cet exercice, on cherche la valeur de la hauteur h qui rend le volume du cône maximum.



1. Exprimer le rayon de la base en fonction de h.
2. Démontrer que le volume du cône, en fonction de sa hauteur h, est :

$$V(h) = \frac{\pi}{3}\left(400h - h^3\right).$$

3. Quelle hauteur h choisir pour que le volume du cône soit maximum?

Sujet 8

Un médicament contre la douleur est administré par voie orale. La concentration du produit actif dans le sang, en milligramme par litre de sang, est modélisé par la fonction f qui, au temps écoulé x en heure, x étant compris entre 0 et 6, associe :

$$f(x) = x^3 - 12x^2 + 36x \quad \text{où} \quad x \in [0\,;\,6].$$

Le produit actif est efficace si sa concentration dans le sang est supérieure ou égale à 5 mg/L.

1. En exécutant le script Python ci-dessous, on obtient la liste [0, 1, 1, 1, 1, 1, 0].

```
1  liste=[0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]
2  for x in range(0,7) :
3      if x**3-12*x**2+36*x>=5:
4          liste[x]= 1
5  print(liste)
```

   À l'aide de ce résultat, indiquer l'intervalle de temps en unité d'heures sur lequel le médicament est efficace.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle [0; 6], calculer sa fonction dérivée.
3. Justifier que la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point A d'abscisse 4 admet pour équation réduite $y = -12x + 64$.
4. Démontrer que $f(x) - (-12x + 64) = (x - 4)^3$.
5. En déduire la position relative de la courbe représentative de la fonction f par rapport à la tangente T au point A.

Sujet 11

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3.
Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé en **centaines d'euros**, est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle [5; 60] par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3.

1. Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.
2. Quels volumes d'engrais faut-il fabriquer pour avoir un coût moyen de production égal à 4 300 € (43 centaines d'euros) ?
3. Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ?
   Déterminer ce coût moyen minimal.

Sujet 13

1. Étudier le signe de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = x^2 + 4x + 3$.
   On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$$

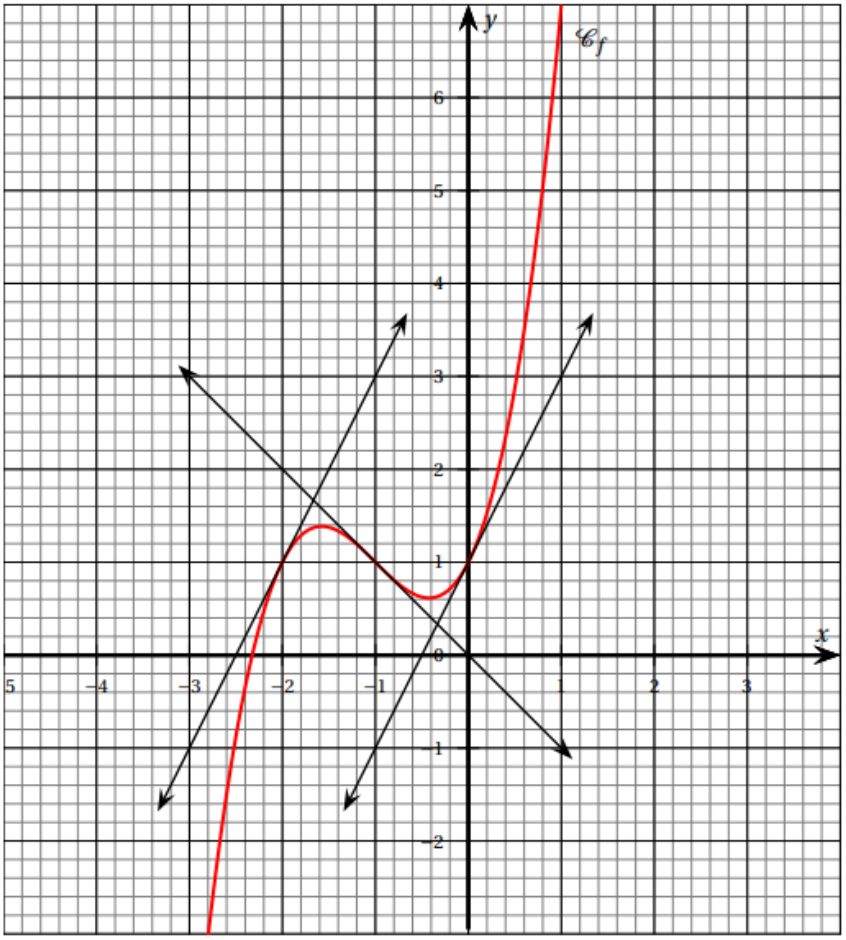
   et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$.
2. Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-2\,;\,+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{P(x)}{(x+2)^2}$$

   où f' est la fonction dérivée de f.
3. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]-2\,;\,+\infty[$ et construire le tableau de variations de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$.
4. Donner le minimum de la fonction f sur $]-2\,;\,+\infty[$ et la valeur pour laquelle il est atteint (on donnera les valeurs exactes).
5. Déterminer le coefficient directeur de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Sujet 12

Dans la figure ci-dessous, on a tracé $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ aux points d'abscisses -2, -1 et 0.



1. Recopier sur la copie en le complétant le tableau de valeurs ci-dessous.

x	-1	0
$f(x)$		
$f'(x)$		

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$$

2. **a.** Calculer $f'(x)$, pour tout réel x.

b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $f'(x) = 0$.

3. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

4. Le point S$(-4\ ;\ -3)$ appartient-il à la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $x = -2$?