Chapitre IV : Modéliser une évolution par une fonction

1) Modèle linéaire : fonction affine

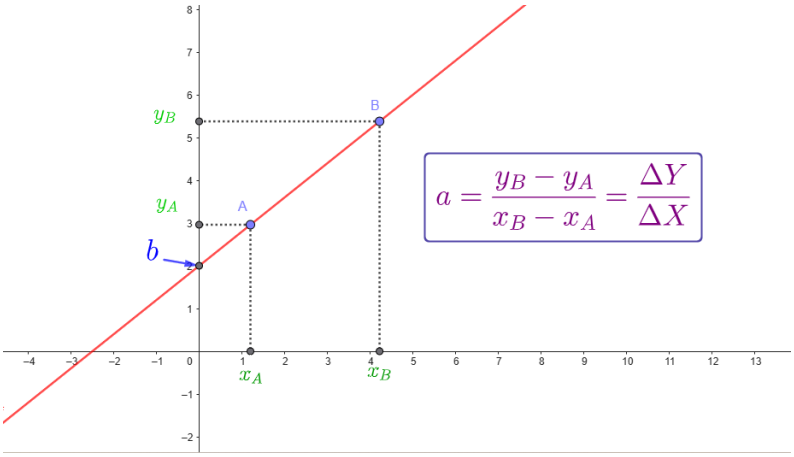
Définition

Une fonction affine est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b$$

où a et b sont des réels.
Le réel a est appelé coefficient directeur : il représente un taux de variation constant.
Le réel b est l'**ordonnée à l'origine**.

Une fonction affine modélise une évolution linéaire.



Lecture graphique

Le coefficient directeur a se calcule à l'aide de deux points A et B de la droite :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Variations

Si $a > 0$ **:** f est croissante sur $\mathbb{R}$

Si $a < 0$ **:** f est décroissante sur $\mathbb{R}$

Signe

Si $a > 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

Si $a < 0$:

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Lien avec les suites arithmétiques

Si (u_n) est une suite arithmétique définie par :

$$u_n = u_0 + nr$$

alors les points (n, u_n) sont situés sur une droite d'équation :

$$y = ax + b$$

avec $a = r$ et $b = u_0$.

2) Modèle exponentiel

Motivation

Les suites géométriques sont définies par :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Lorsque $u_0 = 1$, on obtient :

$$u_n = q^n$$

Ce modèle discret conduit naturellement à introduire une nouvelle famille de fonctions : les fonctions exponentielles.

Définition

Soit $a > 0$.
La fonction exponentielle de base a est définie sur $[0, +\infty[$ par :

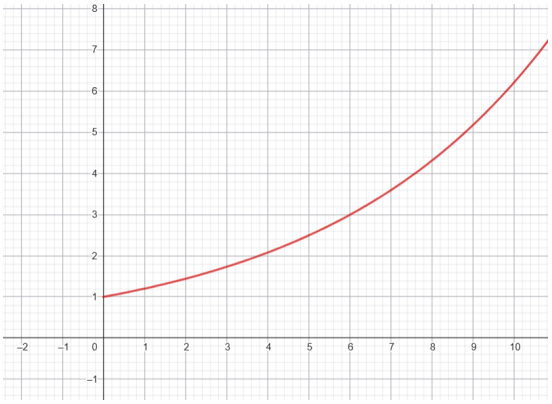
$$f(x) = a^x$$

Variations

$$a > 1 \Longrightarrow f \text{ est croissante}$$

$$0 < a < 1 \Longrightarrow f \text{ est décroissante}$$

Représentations graphiques :



$a > 1$: ici $a = 1{,}2$



$0 < a < 1$: ici $a = 0{,}8$

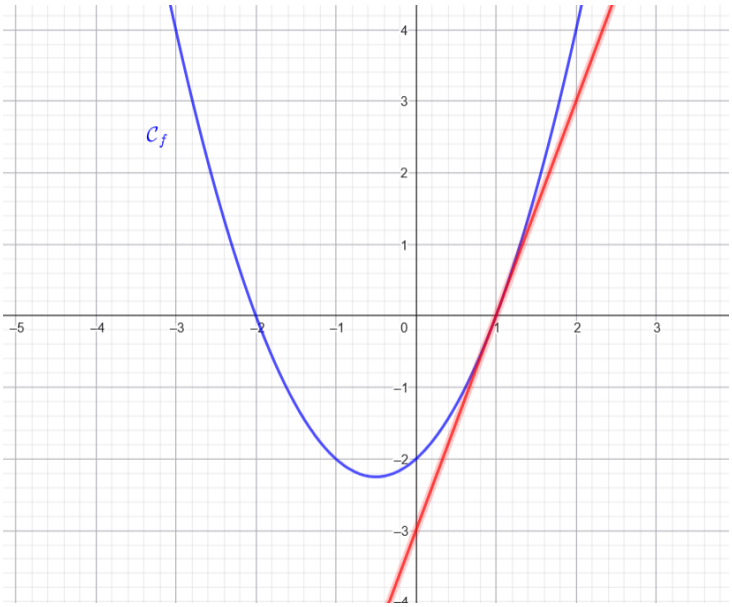
Remarque : on a toujours $f(0) = 1$.

3) Variation et dérivée

Définition

Soit f une fonction et a un réel.
Le nombre dérivé de f en a, noté $f'(a)$, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe en ce point.

Illustration :



Ici $f'(1) = 3$

Propriété

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f \text{ est croissante}$$

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow f \text{ est décroissante}$$

Propriétés

$$(x)' = 1$$

$$(x^2)' = 2x$$

$$(x^3)' = 3x^2$$

Propriété

La dérivée est linéaire :

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$$

où λ et μ sont des réels.