Chapitre VI

Produit scalaire

1. Définition dans un repère orthonormé

Définition — Produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $\left(O\,;\,\vec{i},\vec{j}\right)$ un repère orthonormé du plan. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs.
Le **produit scalaire** de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy'$$

Exemple. Si $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$, alors $\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\times 2 + (-1)\times 4 = 2$.

2. Propriétés

Ces propriétés se démontrent toutes directement depuis la définition, par calcul algébrique sur les coordonnées.

Propriétés — Symétrie, bilinéarité, norme

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tout réel k :

1. **Symétrie :** $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
2. **Bilinéarité :** $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$ et $(k\,\vec{u})\cdot\vec{v} = k\,(\vec{u}\cdot\vec{v})$
3. **Lien avec la norme :** $\vec{u}\cdot\vec{u} = x^2 + y^2 = \|\vec{u}\|^2$

Définition — Forme définie positive

On dit que le produit scalaire est **défini positif** car :

$$\vec{u}\cdot\vec{u} \geqslant 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{u}\cdot\vec{u} = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$$

Cela découle immédiatement de $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $\vec{u} = \vec{0}$.

Propriété — Critère d'orthogonalité

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux** si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u}\perp\vec{v} \iff \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff xx' + yy' = 0$$

Par convention, le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

Propriété — Produit scalaire de vecteurs colinéaires

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs colinéaires. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

En particulier, pour trois points A, B, H alignés :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

Démonstration.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\,\vec{u}$. Par bilinéarité :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\,\vec{u}) = k\,(\vec{u} \cdot \vec{u}) = k\,\|\vec{u}\|^2$$

De plus, $\|\vec{v}\| = \|k\,\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de même sens, $k > 0$ donc $k = |k|$ et $k\,\|\vec{u}\|^2 = |k|\,\|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \times \|\vec{u}\|$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de sens contraires, $k < 0$ donc $k = -|k|$ et $k\,\|\vec{u}\|^2 = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$.

□

Propriétés — Identités remarquables

Par développement à l'aide de la bilinéarité, de la symétrie et de $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$:

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\,\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Définition — Expression du produit scalaire à partir des normes

En isolant $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les identités remarquables, on obtient les **formules de polarisation** :

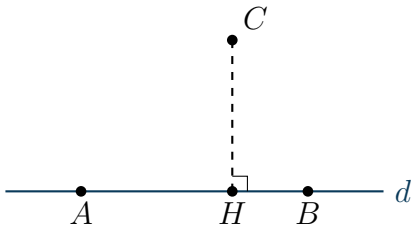
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$$

Ces formules expriment le produit scalaire **uniquement à l'aide de normes**, c'est-à-dire de longueurs. Or une longueur ne dépend pas du repère choisi. **Le produit scalaire est donc une notion intrinsèque, indépendante du repère orthonormé.**

3. Projeté orthogonal

Définition — Projeté orthogonal

Soient A un point et d une droite. Le **projeté orthogonal** de A sur d est l'unique point H de d tel que $(AH) \perp d$. Si $A \in d$, alors $H = A$.



Propriété — Expression du produit scalaire via le projeté orthogonal

Soient A, B, C trois points avec $A \neq B$, et H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB). Alors :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

et donc, comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de même sens} \\ -AB \times AH & \text{si } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AH} \text{ sont de sens contraires} \end{cases}$$

Démonstration.

Par la relation de Chasles : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}$.

Par bilinéarité :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC}\right) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$$

H est le projeté orthogonal de C sur (AB), donc $\overrightarrow{HC} \perp \overrightarrow{AB}$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ (critère d'orthogonalité, section 2). Donc :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$$

L'expression en $AB \times AH$ ou $-AB \times AH$ découle alors directement de la propriété sur le produit scalaire de vecteurs colinéaires (section 2). □

4. Formule avec le cosinus et les normes

L'indépendance du repère établie en section 2 permet d'exprimer le produit scalaire à l'aide de l'angle entre les vecteurs, notion elle aussi intrinsèque.

Propriété — Formule angulaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls, et $\theta = \left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$ l'angle entre ces vecteurs. Alors :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \ \|\vec{v}\| \cos\theta}$$

En particulier, avec trois points A, B, C distincts :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)}$$

Justification. Notons $\theta = \widehat{BAC}$ et H le projeté orthogonal de C sur (AB). Dans le triangle rectangle AHC, on a $AH = AC\,|\cos\theta|$.

- Si $\theta < 90$, $\cos\theta > 0$ et $\overrightarrow{AH}$ est de même sens que $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH = AB \times AC \cos\theta$.
- Si $\theta > 90$, $\cos\theta < 0$ et $\overrightarrow{AH}$ est de sens contraire à $\overrightarrow{AB}$, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH = -AB \times AC\,|\cos\theta| = AB \times AC \cos\theta$.

Dans les deux cas : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \cos\theta$.

Conséquences immédiates.

- $\vec{u} \cdot \vec{v} > 0 \iff \theta \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right[$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \iff \vec{u} \perp \vec{v}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \iff \theta \in \left]\frac{\pi}{2}\,;\, \pi\right]$

5. Formule d'Al-Kashi

Théorème — Formule d'Al-Kashi

Dans un triangle ABC, en notant $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$:

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

et de même pour les deux autres côtés par symétrie des rôles.

Remarque. Si $\hat{A} = 90$, on retrouve le théorème de Pythagore.

Démonstration. $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, donc par identité remarquable :

$$a^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 - 2\,\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 = c^2 - 2bc\cos\hat{A} + b^2$$

□

Exemple. $AB = 5$, $AC = 7$, $\widehat{BAC} = 60$. Alors $BC^2 = 25 + 49 - 35 = 39$, d'où $BC = \sqrt{39}$.

6. Transformation de $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Propriété

Soient A, B deux points et I le milieu de $[AB]$. Pour tout point M :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

Démonstration. $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}$ (car I milieu). Par identité remarquable :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 = MI^2 - \frac{AB^2}{4}$$

□

7. Géométrie repérée

Dans cette section, le plan est rapporté à un repère orthonormé.

7.1 Vecteur normal — Équation cartésienne d'une droite

Définition — Vecteur normal

Un **vecteur normal** à une droite d est un vecteur non nul orthogonal à tout vecteur directeur de d.

Propriété — Équation cartésienne et vecteurs caractéristiques

Soit d une droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a\,;\,b) \neq (0\,;\,0)$. Alors :

- $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un **vecteur normal** à d,
- $\vec{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un **vecteur directeur** de d.

Réciproquement, toute droite ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Exemple. Droite passant par $A(2\,;\,1)$, vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$: $3x - y + c = 0$, puis $A \in d$ donne $c = -5$. Équation : $3x - y - 5 = 0$.

7.2 Équation de cercle

Définition — Équation d'un cercle

Le cercle de centre $\Omega(a\,;\,b)$ et de rayon $r > 0$ est l'ensemble des points $M(x\,;\,y)$ vérifiant :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Reconnaître une équation de cercle. $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$: on complète le carré.

Exemple. $(x-2)^2+(y+3)^2=16$: centre $(2\,;\,-3)$, rayon 4.

Propriété — Cercle de diamètre $[AB]$ (démonstration exigible)

L'ensemble des points M vérifiant $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$ est le **cercle de diamètre** $[AB]$.

Démonstration. Soit I le milieu de $[AB]$. D'après la section 6 :

$$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\frac{AB^2}{4} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0 \iff MI=\frac{AB}{2}$$

qui est exactement la définition du cercle de centre I et de rayon $\dfrac{AB}{2}$. □

Théorème du cercle circonscrit

Soient A, B, M trois points distincts. Alors :

$$AMB \text{ est rectangle en } M \iff M \text{ appartient au cercle de diamètre } [AB]$$

Remarque. On retrouve ainsi, par le produit scalaire, le **théorème du cercle circonscrit à un triangle rectangle** vu au collège.