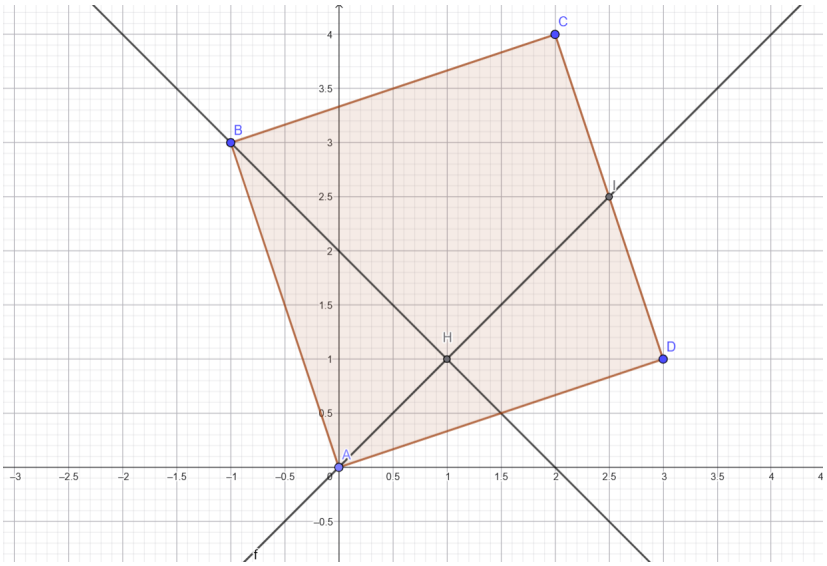
Devoir surveillé bis — Produit scalaire

Corrigé

Exercice 1

On a $A(0\,;0)$, $B(-1\,;3)$, $C(2\,;4)$, $D(3\,;1)$.

1. Figure complétée au fil de l'exercice :



2. On calcule :

$$\vec{AB}\begin{pmatrix}-1-0\\3-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix} \qquad \vec{DC}\begin{pmatrix}2-3\\4-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$$

On a $\vec{AB}=\vec{DC}$, donc le quadrilatère $ABCD$ est un **parallélogramme**.

3. **a.** On a $\vec{AD}\begin{pmatrix}3-0\\1-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$.

Donc :

$$\vec{AB}\cdot\vec{AD}=(-1)\times 3+3\times 1=-3+3=0$$

Le produit scalaire est nul, donc les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont orthogonaux. Le parallélogramme $ABCD$ possède un angle droit en A : c'est un **rectangle**.

b. On a $\vec{AC}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{BD}\begin{pmatrix}4\\-2\end{pmatrix}$.

Donc :

$$\vec{AC}\cdot\vec{BD}=2\times 4+4\times(-2)=8-8=0$$

Les diagonales du rectangle $ABCD$ sont perpendiculaires : c'est donc un **carré**.

4. On a $\vec{CD}=\begin{pmatrix}3-2\\1-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3\end{pmatrix}$, donc :

$$\vec{CI}=\frac{1}{2}\vec{CD}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

En notant $I(x_I\,;y_I)$, on a $\vec{CI}\begin{pmatrix}x_I-2\\y_I-4\end{pmatrix}$. On en déduit :

$$\begin{cases}x_I-2=\dfrac{1}{2}\\y_I-4=-\dfrac{3}{2}\end{cases}\iff\begin{cases}x_I=\dfrac{5}{2}\\y_I=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

Donc $I\left(\dfrac{5}{2}\,;\dfrac{5}{2}\right)$.

5. On a $\vec{AI}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}-0\\\frac{5}{2}-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\\frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

Donc :

$$\vec{AI}\cdot\vec{AB}=\frac{5}{2}\times(-1)+\frac{5}{2}\times 3=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5$$

6. Voir figure.

7. Comme H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AI), on a :

$$\vec{AI}\cdot\vec{AB}=AI\times AH$$

car les vecteurs $\vec{AI}$ et $\vec{AH}$ sont colinéaires et de même sens (ce que confirme le résultat positif obtenu à la question **5.**).

8. On a :

$$AI=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{4}+\frac{25}{4}}=\sqrt{\frac{50}{4}}=\frac{\sqrt{50}}{2}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

D'après les questions **5.** et **7.** :

$$AI\times AH=5\iff AH=\frac{5}{AI}=\frac{5}{\frac{5\sqrt{2}}{2}}=\frac{5\times 2}{5\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

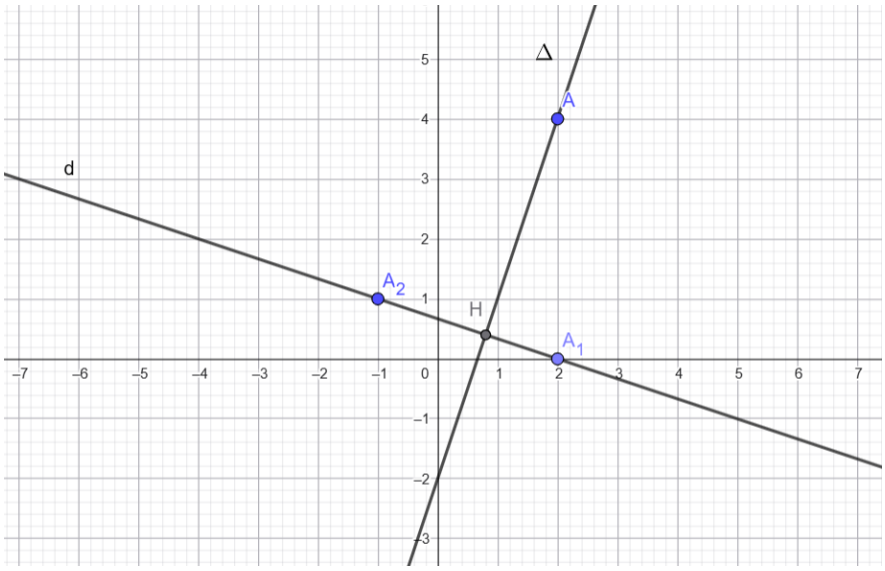
Exercice 2

1. Pour tracer une droite, il suffit de connaître deux de ses points. On cherche les coordonnées de deux points appartenant à d. Pour cela, on choisit librement deux valeurs de x, puis on calcule les valeurs de y correspondantes à l'aide de l'équation de d.

On choisit ici par exemple $x=2$ et $x=-1$:

- $x=2$: $\quad 2+3y-2=0\iff y=0\quad$ donc $A_1(2\,;0)\in d$
- $x=-1$: $\quad -1+3y-2=0\iff y=1\quad$ donc $A_2(-1\,;1)\in d$

On trace alors la droite (A_1A_2), qui est la droite d.



2. L'équation cartésienne de d est de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = 1$, $b = 3$.
Un vecteur normal est $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$; un vecteur directeur est $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ (composantes $(-b\,;a)$).

3. La droite Δ est perpendiculaire à d. Le vecteur directeur de d, noté $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, est donc orthogonal à tout vecteur directeur de Δ.
Méthode 1 — caractérisation par le produit scalaire.
Soit $M(x\,;y)$ un point du plan. Alors :

$$M \in \Delta \iff A\vec{M} \perp \vec{u} \iff A\vec{M} \cdot \vec{u} = 0$$

Or $A\vec{M}\begin{pmatrix}x-2\\y-4\end{pmatrix}$, donc :

$$A\vec{M} \cdot \vec{u} = -3(x-2) + 1 \times (y-4) = -3x + 6 + y - 4 = -3x + y + 2$$

Ainsi :

$$M \in \Delta \iff -3x + y + 2 = 0$$

Une équation cartésienne de Δ est donc $-3x + y + 2 = 0$, ou de manière équivalente Δ : $3x - y - 2 = 0$.
Méthode 2 — par identification d'un vecteur normal.
La droite Δ est perpendiculaire à d, donc un vecteur normal de Δ est un vecteur directeur de d, soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$.
Une équation cartésienne de Δ est donc de la forme $-3x + y + c = 0$.
Le point $A(2\,;4)$ appartient à Δ :

$$-3 \times 2 + 4 + c = 0 \iff c = 2$$

Donc $\Delta : -3x + y + 2 = 0$, ou de manière équivalente $\Delta : 3x - y - 2 = 0$.

4. On résout le système :

$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0 \\ 3x - y - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 3y = 2 & (L_1) \\ 3x - y = 2 & (L_2) \end{cases}$$

Méthode 1 — par substitution.
De (L_2) on tire $y = 3x - 2$. En substituant dans (L_1) :

$$x + 3(3x - 2) = 2 \iff 10x = 8 \iff x = \frac{4}{5}$$

Puis $y = 3 \times \frac{4}{5} - 2 = \frac{12}{5} - \frac{10}{5} = \frac{2}{5}$.
Méthode 2 — par combinaison linéaire.
Pour éliminer y, on calcule $(L_1) + 3(L_2)$:

$$(x + 3y) + 3(3x - y) = 2 + 3 \times 2 \iff x + 3y + 9x - 3y = 8 \iff 10x = 8 \iff x = \frac{4}{5}$$

On remplace alors x par $\frac{4}{5}$ dans (L_1) :

$$\frac{4}{5} + 3y = 2 \iff 3y = 2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \iff y = \frac{2}{5}$$

Dans les deux cas, le point d'intersection est $\boxed{\left(\frac{4}{5}\,;\frac{2}{5}\right)}$.

5. Voir figure.

Exercice 3

On a $A(1\,;1)$, $B(5\,;3)$, $C(0\,;4)$.

1. Figure (non reproduite ici).

2. **a.** $\vec{AB}\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{AC}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$, donc :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 4 \times (-1) + 2 \times 3 = -4 + 6 = 2$$

b. $AB = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
$AC = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10}$

c. On utilise la formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$:

$$\cos\widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{2}{2\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{2}{2\sqrt{50}} = \frac{1}{5\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10}$$

Donc $\widehat{BAC} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right) \approx 81{,}9$.

3. Pour l'angle $\widehat{CBA}$, on calcule les vecteurs partant de B :
$\vec{BC}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{BA}\begin{pmatrix}-4\\-2\end{pmatrix}$.

a. $\vec{BC} \cdot \vec{BA} = (-5) \times (-4) + 1 \times (-2) = 20 - 2 = 18$

b. $BC = \sqrt{25 + 1} = \sqrt{26}$ et $BA = AB = 2\sqrt{5}$

c. $\cos\widehat{CBA} = \dfrac{18}{\sqrt{26} \times 2\sqrt{5}} = \dfrac{18}{2\sqrt{130}} = \dfrac{9}{\sqrt{130}}$

Donc $\widehat{CBA} = \arccos\left(\dfrac{9}{\sqrt{130}}\right) \approx 37{,}9$.

4. La somme des angles d'un triangle vaut 180, donc :

$$\widehat{ACB} \approx 180 - 81{,}9 - 37{,}9 \approx 60{,}2$$